©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Sitzungsber. Abt. II (1998) 207: 183–198

Sitzungsberichte
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse Abt. II
Mathematische, Physikalische und Technische Wissenschaften

© Österreichische Akademie der Wissenschaften 1999
Printed in Austria

Zur Konstruktion der Apollonischen Berührkreise im Isotropen

Von

J. Tölke

(Vorgelegt in der Sitzung der math.-nat. Klasse am 15. Oktober 1998 durch das k. M. Hellmuth Stachel)

Einleitung

In der isotropen Ebene I_2 betrachten wir die von drei verschiedenen parabolischen Kreisen, von denen sich keine zwei hyperoskulieren, gebildete Menge $\mathbf{M}$. Vermöge der Potenzgeraden der Kreistripel ergibt sich eine Klasseneinteilung von $\mathbf{M}$. Diese ist invariant bezüglich der I_2 zugrundeliegenden Bewegungsgruppe $\mathbf{B}_3$.

Das Apollonische Berührproblem für die Kreistripelklassen mit parallelen Potenzgeraden wurde für isotrope bzw. nicht isotrope Richtung in [5] bzw. im wesentlichen in [6] behandelt. Zu den dort untersuchten Kreistripeln kommen noch jene hinzu, für welche (a) die Tripelkreise paarweise inkongruent sind und sich genau zwei Tripelkreise berühren, und (b) die Kreistripel mit gemeinsamer Potenzgeraden. Im Falle (a) hyperoskuliert der Berührkreis einen Tripelkreis. Für die Kreistripel (b) sind die Lösungen bzw. Nichtlösungen des Apollonischen Berührproblems evident.

Somit steht eine konstruktive Behandlung jener Kreistripelklasse $\mathrm{M} \in \mathbf{M}$ aus, deren Tripelkreise ein *eindeutig bestimmtes Potenzzentrum* $P \in I_2$ besitzen. Wir geben zunächst eine explizite Darstellung für die Radien möglicher Berührkreise an. Über sie gewinnen wir ein *geometrisches* Entscheidungsmerkmal für die Existenz von hyperoskulierenden und

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nicht hyperoskulierenden Berührkreisen. Letztere heißen bekanntlich die *Apollonischen Berührkreise* des Kreistripels.

Die hiermit gleichzeitig gewonne Konstruktion der Berührkreise ist dual zu einer von J. Lang [1, S.10] angedeuteten Konstruktionsmöglichkeit und basiert auf dem *Potenzzentrum* und der dazu metrisch dualen *Ähnlichkeitsachse* des Kreistripels.

1. Die analytische Darstellung der Berührkreise

1. Für die Kreise K_i, K_j, K_k der Kreistripel der Klasse M gilt $(l = i, j, k)$

$$\begin{aligned} &y = \mathrm{R}_l x^2 + \alpha_l x + \beta_l \quad \text{mit} \quad \mathrm{R}_l \neq 0 \quad \text{und} \\ &\quad (\mathrm{R}_i - \mathrm{R}_j)(\mathrm{R}_i - \mathrm{R}_k)(\mathrm{R}_j - \mathrm{R}_k) \neq 0 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{R}_i = \mathrm{R}_j, \mathrm{R}_k \neq \mathrm{R}_i, \\ &\quad \alpha_i \neq \alpha_j \quad \text{und} \quad I \neq 0. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Hierbei haben wir abkürzend gesetzt

$$\begin{aligned} \mathrm{I} &:= \alpha_i(\mathrm{R}_j - \mathrm{R}_k) + \alpha_j(\mathrm{R}_k - \mathrm{R}_i) + \alpha_k(\mathrm{R}_i - \mathrm{R}_j), \\ \mathrm{II} &:= \beta_i \mathrm{R}_i(\mathrm{R}_j - \mathrm{R}_k) + \beta_j \mathrm{R}_j(\mathrm{R}_k - \mathrm{R}_i) + \beta_k \mathrm{R}_k(\mathrm{R}_i - \mathrm{R}_j), \\ \mathrm{III} &:= \beta_i(\mathrm{R}_j - \mathrm{R}_k) + \beta_j(\mathrm{R}_k - \mathrm{R}_i) + \beta_k(\mathrm{R}_i - \mathrm{R}_j), \\ \mathrm{IV} &:= 4\mathrm{II} + \alpha_i^2(\mathrm{R}_j - \mathrm{R}_k) + \alpha_j^2(\mathrm{R}_k - \mathrm{R}_i) + \alpha_k^2(\mathrm{R}_i - \mathrm{R}_j). \end{aligned} \tag{1.2}$$

Die *Potenzachsen* p_{mn} der Tripelkreise K_m, K_n

$$(\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_n)y + (\alpha_m \mathrm{R}_n - \alpha_n \mathrm{R}_m)x + \beta_m \mathrm{R}_n - \beta_n \mathrm{R}_m = 0 \tag{1.3}$$

schneiden sich im *Potenzzentrum* $P = (x_P, y_P)$ mit

$$\begin{aligned} \mathrm{I}\, x_P = -\mathrm{III}, \quad I\, y_P &= \beta_i(\alpha_j \mathrm{R}_k - \alpha_k \mathrm{R}_j) + \beta_j(\alpha_k \mathrm{R}_i - \alpha_i \mathrm{R}_k) \\ &\quad + \beta_k(\alpha_i \mathrm{R}_j - \alpha_j \mathrm{R}_i). \end{aligned} \tag{1.4}$$

Auf Grund der in der isotropen Ebene I_2 herrschenden metrischen Dualität ist die *Punktpotenz* $\mathbf{p}(P, K)$ eines Punktes $P \in I_2$ bezüglich eines parabolischen Kreises K dual zum Begriff der *Geradenpotenz* $\mathbf{P}(a, K)$ einer nicht isotropen Punktreihe a bezüglich K als Klassenkurve. Der Potenzgeraden p_{mn} zweier Kreise K_m, K_n entspricht dual das *Ähnlichkeitszentrum* A_{mn}. Sind K_m und K_n inkongruent, so gilt für $A_{mn} = (a_{mn}, b_{mn})$ mit

$$a_{mn} = -\frac{1}{2}\frac{\alpha_m - \alpha_n}{\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_n}, \quad b_{mn} = -\frac{1}{4}\frac{\alpha_m^2 - \alpha_n^2}{\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_n} + \frac{\beta_m \mathrm{R}_m - \beta_n \mathrm{R}_n}{\mathrm{R}_m - \mathrm{R}_n}. \tag{1.5}$$

Sind K_m und K_n von (1.1) kongruent, so ist das Ähnlichkeitszentrum der Fernpunkt $\{0 \quad 1 \quad \frac{1}{2}(\alpha_m + \alpha_n) - 2R_n(\beta_m - \beta_n/\alpha_m - \alpha_n)\}$ der gemeinsamen Tangente.

Nach Voraussetzung ist jedem Kreistripel der Klasse M sowohl genau ein Punkt $P \in I_2$, das *Potenzzentrum*, mit $\mathbf{p}(P, K_i) = \mathbf{p}(P, K_j) = \mathbf{p}(P, K_k)$ als auch genau eine nicht isotrope Punktreihe a, die *Ähnlichkeitsachse*, mit $\mathbf{P}(a, K_i) = \mathbf{P}(a, K_j) = \mathbf{P}(a, K_k)$ zugeordnet. Für die Ähnlichkeitsachse a der Tripels (1.1) gilt

$$a(x, y) \equiv y - Ax - B = 0 \quad \text{mit} \quad 2I\,A := \mathrm{IV}$$

und

$$\begin{aligned} 4IB := {} & (\alpha_i - \alpha_j)(\alpha_i - \alpha_k)(\alpha_j - \alpha_k) - 4\{\beta_i R_i(\alpha_j - \alpha_k) \\ & + \beta_j R_j(\alpha_k - \alpha_i) + \beta_k R_k(\alpha_i - \alpha_j)\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

2. *Unter einem Gleichwinkelkreis K*

$$y = Rx^2 + \alpha x + \beta \tag{1.7}$$

der Kreise (1.1) verstehen wir einen Kreis, der alle Tripelkreise unter gleichem Winkel schneidet. Zu diesen Gleichwinkelkreisen gehören auch die zu bestimmenden Berührkreise von (1.1). Nach [2, S. 42] muß also mit

$$\varphi^2(K, K_l) := (\alpha - \alpha_l)^2 - 4(R - R_l)(\beta - \beta_l) \tag{1.8}$$

$\varphi^2(K, K_i) = \varphi^2(K, K_j) = \varphi^2(K, K_k)$ gelten. Fassen wir hierin R als Parameter auf, so folgt

$$\begin{aligned} \alpha = A - 2Rx_P, \beta = B - \frac{R}{I}\{ & (\alpha_i - \alpha_k)(\beta_j - \beta_k) \\ & - (\alpha_j - \alpha_k)(\beta_i - \beta_k)\}. \end{aligned} \tag{1.9}$$

Wir wollen den rechten Summanden im Ausdruck β umformen. Bezeichnet

$$x_B, x_B^* = -x_B + 2x_P \tag{1.10}$$

die gemeinsamen Abszissen der Berührpunkte der Tangenten an K_l durch P, so gilt nach der *Potenzformel* [2, S. 38f]

$$\begin{aligned} \mathbf{p}(P, K_l) - x_P^2 = (x_B - x_P)^2 - x_P^2 = \frac{1}{R_l}(-y_P + \alpha_l x_P + \beta_l), \\ l = i, j, k \end{aligned} \tag{1.11}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und man verifiziert

$$\frac{1}{R_l}(-y_P + \alpha_l x_P + \beta_l) = \frac{1}{I}\{(\alpha_i - \alpha_k)(\beta_j - \beta_k) - (\alpha_j - \alpha_k)(\beta_i - \beta_k)\}. \tag{1.12}$$

Damit folgt als *Darstellung der Gleichwinkelkreise*

$$y - Ax - B - R(x - x_B)(x - x_B^*) = 0. \tag{1.7'}$$

Alle Gleichwinkelkreise gehen also durch die auf der Ähnlichkeitsachse von den isotropen Geraden[1] $x = x_B$ und $x = x_B^*$ ausgeschnittenen Punkte.

Für die Radien R der *Berührkreise* des Tripels (1.1) gilt nach (1.8) und (1.9)

$$[A - 2Rx_P - \alpha_l]^2 - 4(R - R_l)[B - Rx_B(x_B - 2x_P) - \beta_l] = 0, \quad l = i, j, k. \tag{1.12}$$

Um zu sehen und zum Ausdruck zu bringen, daß (1.12) gegenüber der isotropen Bewegungsgruppe $\mathbf{B}_3$ invariant ist, verwenden wir den *isotropen Abstand* $\mathbf{d}(P, a)$ [4, S.504] des Potenzzentrums P von der Ähnlichkeitsachse a

$$\mathbf{d}(P, a) := a(x_P, y_P). \tag{1.13}$$

Hiermit schreibt sich (1.11) in der Form

$$\mathbf{d}(P, a) = R_l x_B x_B^* - x_P(A - \alpha_l) + \beta_l - B. \tag{1.14}$$

Mit der *Geradenpotenz* $\mathbf{P}(a, K_i) = \mathbf{P}(a, K_j) = \mathbf{P}(a, K_k)$ der Ähnlichkeitsachse a [2, S. 49]

$$\mathbf{P}(a, K_l) := (A - \alpha_l)^2 + 4R_l(B - \beta_l), \quad l = i, j, k \tag{1.15}$$

folgt dann für die Radien R der Berührkreise des Tripels (1.1) die gesuchte *invariante Darstellung*

$$4\mathbf{p}(P, K_l) \quad R^2 + 4\mathbf{d}(P, a) \quad R + \mathbf{P}(a, K_l) = 0. \tag{1.16}$$

Satz 1. Für die Radien R der Berührkreise eines Kreistripels (1.1) gilt die quadratische Gleichung (1.16). Darin bedeutet $\mathbf{p}(P, K_l)$ bzw. $\mathbf{P}(a, K_l)$ die Punkt-bzw. Geradenpotenz des Potenzzentrumd P bzw. der Ähnlichkeitsachse a bezüglich der Tripelkreise K_l und $\mathbf{d}(P, a)$ den isotropen Abstand

[1] Diese beiden isotropen Geraden sind also das Analogon des (euklidischen) *Hauptkreises* [3, S. 258f].

des Punktes P von der Geraden a. Die R-Lösungen von (1.16) bestimmen die Berührkreise gemäß

$$y - Ax - B - R\{(x - x_P)^2 - \mathbf{p}(P, K_l)\} = 0, \qquad (1.7'')$$

worin $y - Ax - B = 0$ die Darstellung der Ähnlichkeitsachse a ist.

Diese explizite Darstellung für den Radius R der Berührkreise ergänzt zum einen die Untersuchungen von J. Lang [1, Satz 8] und H. Sachs [2, Satz 4.6] — sie geben nur Aussagen über die Lösungsanzahl von R — und ermöglicht zum anderen detaillierte Aussagen über die Abhängigkeit der Berührkreise von der gegenseitigen Lage der Tripelkreise. Dies gilt auch unter Einschluß des einen Tripelkreis hyperoskulierenden Berührkreises. Um Mißverständnisse zu vermeiden, geben wir die

Definition. Unter einem *Apollonischen Berührkreis* eines Kreistripels von parabolischen Kreisen versteht man einen von den Tripelkreisen verschie-

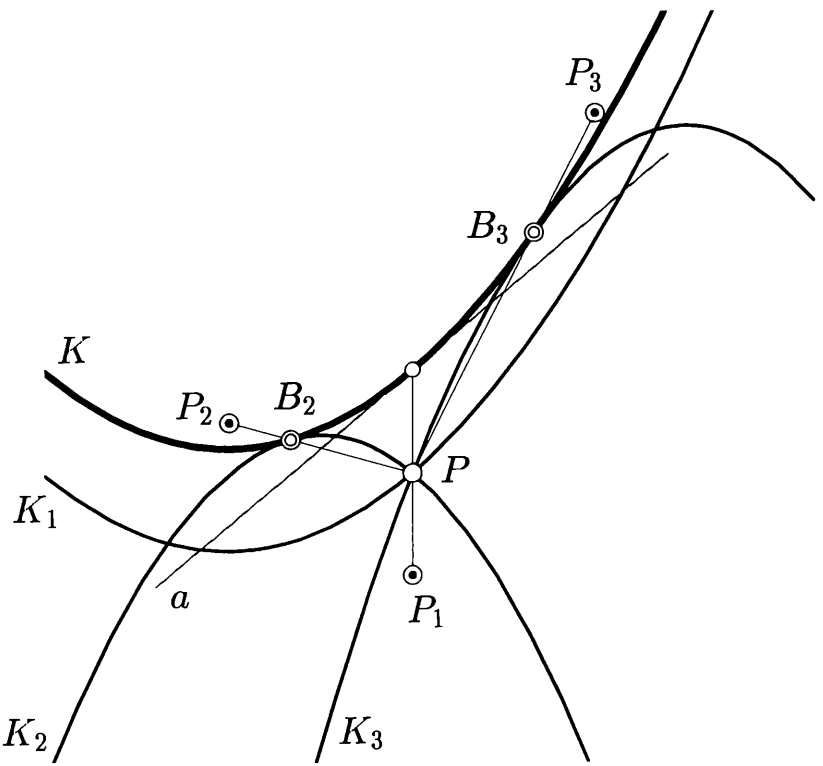

Abb. 1. Beispiel eines Kreistripels mit genau einem Berührkreis; dieser ist ein hyperoskulierender Apollonischer Berührkreis

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

denen Kreis, der alle Tripelkreise berührt, aber keinen hyperoskuliert. Lassen wir Hyperoskulation zu, so sprechen wir von einem *hyperoskulierenden* Apollonischen Berührkreis.

2. Eigenschaften der Berührkreise und Existenzaussagen

1. Ein Berührkreis des Tripels (1.1) ist also entweder ein Apollonischer oder ein hyperoskulierender Apollonischer Berührkreis. Untersuchen wir zunächst, was diese Unterscheidung für das Kreistripel (1.1) bedeutet.

Die Koeffizienten von (1.16) sind nicht unabhängig voneinander! Bezeichnet $P_l = (x_l, y_l)$ den Pol der Ähnlichkeitsachse am Tripelkreis K_l, also

$$A = 2R_l x_l + \alpha_l, \quad y_l = \alpha_l x_l + 2\beta_l - B, \tag{2.1}$$

so gilt nach (1.14) und (1.15)

$$4\mathbf{p}(P, K_l)R_l^2 + 4\mathbf{d}(P, a)R_l + \mathbf{P}(a, K_l) = 4R_l^2 d^2(P, P_l), \tag{1.15'}$$

wobei $d(S, T)$ den isotropen Abstand der Punkte S, T bezeichnet. Also gilt: Existiert ein Berührkreis des Tripels (1.1), so ist er genau für P_l parallel zu $P(P_l \| P)$ ein hyperoskulierender Berührkreis. Zur Gewinnung schärferer Ausagen benötigen wir

Lemma 1. *Die Ähnlichkeitsachse eines Kreistripels (1.1) ist genau dann die Polare des Potenzzentrums am Tripelkreis K_l, wenn K_l die beiden anderen Tripelkreise berührt.*

Beweis: Bezeichne (u, v, w) eine gerade Permutation von (i, j, k). Dann gilt nach (1.2)

$$\mathrm{IV} - 4\mathrm{II} - 2\alpha_u I = (\alpha_u - \alpha_v)^2(R_w - R_u) + (\alpha_u - \alpha_w)^2(R_u - R_v) \tag{2.2}$$

und

$$\mathrm{II} + R_u \mathrm{III} = -(\beta_v - \beta_w)(R_u - R_v)(R_u - R_w).$$

Also folgt

$$4IR_u(x_u - x_P) = \varphi^2(K_u, K_w)(R_u - R_v) - \varphi^2(K_u, K_v)(R_u - R_w) \tag{2.3}$$

und

$$\begin{aligned} 4I(y_P - y_u - \alpha_u(x_P - x_u)) &= \varphi^2(K_u, K_w)(\alpha_u - \alpha_v) \\ &\quad - \varphi^2(K_u, K_v)(\alpha_u - \alpha_w), \end{aligned} \tag{2.4}$$

woraus sich mit $I \neq 0$ die Behauptung ergibt. ■

Bemerkung 1. In (1.16) können wegen $I \neq 0$ nicht alle Koeffizienten gleichzeitig verschwinden. Also gibt es im Falle $\mathbf{p}(P, K_l) = \mathbf{d}(P, a) = 0$ keinen Berührkreis. Geometrisch bedeutet dies, daß die Tripelkreise einem parabolischen Kreisbündel angehören und sich genau zwei Tripelkreise berühren.

Satz 2. Berührt ein Kreis eines Tripels (1, 1) die beiden anderen Tripelkreise, so hat das Tripel keinen Berührkreis.

In der Menge der Kreistripel (1.1), für die nicht $\mathbf{p}(P, K_l) = \mathbf{d}(P, a) = 0$ gilt, sind die hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreise somit durch

$$P \| P_l \quad \text{und} \quad P \neq P_l \tag{2.5}$$

charakterisiert. Da für das Kreistripel (1.1) mit $R_i = R_j$ nach (2.3)

$$P_i \nparallel P \nparallel P_j \tag{2.6}$$

gilt, kann für dieses Tripel die Bedingung (2.5) höchstens für $l = k$ gelten. Für den anderen Tripeltyp von (1.1) kann (2.5) wegen $I \neq 0$ höchstens für zwei $m, n \in \{i, j, k\}$ eintreten.
Wir formulieren den

Existenzsatz. Bezeichne M_0 die Menge der Kreistripel (1.1), für welche $\mathbf{p}(P, K)$ und $\mathbf{d}(P, a)$ nicht gleichzeitig verschwinden. Dann existieren für

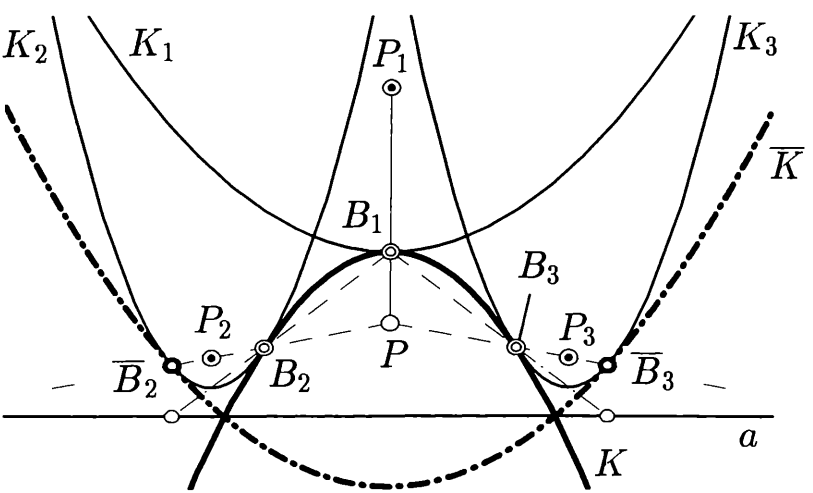

Abb. 2. Beispiel eines Kreistripels mit einem Apollonischen und einem hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreis

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

jedes Tripel von M_0 mit $P \nmid P_i, P_j, P_k$ genau so viele verschiedene Apollonische Berührkreise wie es verschiedene Lösungen R von (1.16) gibt.

Da R nach (1.7″) den Berührkreis eindeutig bestimmt, folgt

Satz 3. Hat ein Kreistripel (1.1) zwei verschiedene Berührkreise $K, \bar{K}$, so sind diese inkongruent und können sich nicht berühren.

Denn sind $R, \bar{R}$ die Radien von $K, \bar{K}$, so gilt

$$\varphi^2(K, \bar{K}) = 4(R - \bar{R})^2 \mathbf{p}(P, K_l). \tag{2.7}$$

Satz 4. hat ein Kreistripel (1.1) zwei verschiedene parabolische Berührkreise $K, \bar{K}$, so ist das Potenzzentrum P bzw. die Ähnlichkeitsachse a des Tripels ihr Ähnlichkeitszentrum bzw. ihre Potenzachse.

Beweis: Bezeichnet $R, \bar{R}$ die bezüglichen Radien von $K, \bar{K}$, so gilt nach (1.16): $\mathbf{p}(P, K_l)(R + \bar{R}) + \mathbf{d}(P, a) = 0$. Wegen $R\bar{R} \neq 0$ ist das Ähnlichkeitszentrum der Kreise $K, \bar{K}$ definiert und wegen (1.9) und (1.11) nach (1.5) gleich dem Potenzzentrum P. Die zweite Behauptung folgt unmittelbar aus (1.3). ■

2. Bei der Diskussion von (1.16) kommt es auf das Verhalten der Diskriminante

$$\Delta := \mathbf{d}^2(P, a) - \mathbf{p}(P, K_l)\mathbf{P}(a, K_l) \tag{2.8}$$

an. Setzen wir in (2.8, Rechts) die bezüglichen Bedeutungen ein, so folgt

$$\begin{aligned}\Delta = [\mathbf{d}(P, a) - 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B)][\mathbf{d}(P, a) \\ + 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B^*)].\end{aligned} \tag{2.8'}$$

Lemma 2. *Ist das Ähnlichkeitszentrum der Kreise K_m, K_n eines Kreistripels (1.1) zu einem der Tangentenberührpunkte vom Potenzzentrum an die Tripelkreise K_m, K_n parallel, so berühren sich K_m und K_n.*

Beweis: Damit die Voraussetzung erfüllbar ist, muß im Fall $R_i = R_j$ des Tripels (1.1) o.B.d.A. $m = k$ sein. Nach (1.14) gilt

$$\beta_m - \beta_n + (R_m - R_n)x_B x_B^* + (\alpha_m - \alpha_n)x_P = 0. \tag{2.9}$$

Gilt dann mit (1.5) $x_B = a_{mn}$ bzw. $x_B^* = a_{mn}$, so folgt

$$0 = \beta_m - \beta_n - (R_m - R_n)a_{mn}^2 = -\frac{1}{4}\frac{\varphi^2(K_m, K_n)}{R_m - R_n}. \qquad ■$$

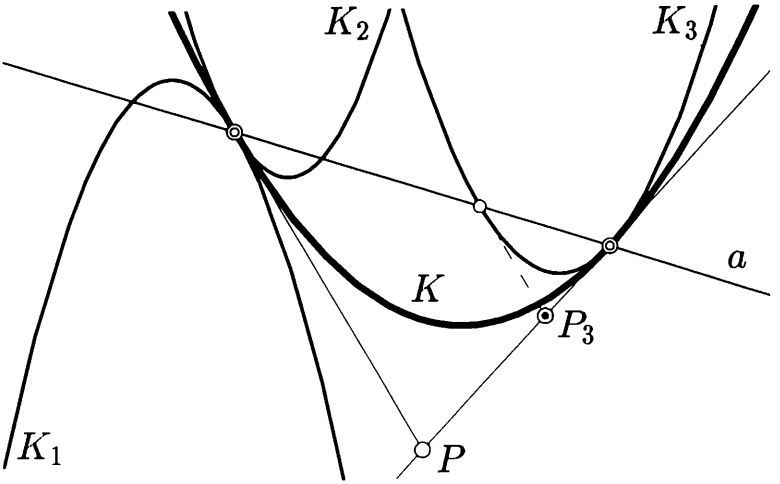

Abb. 3. Beispiel eines Kreistripels mit genau einem parabolischen Apollonischen Berührkreis ($\Delta = 0$)

Satz 5. Ein Kreistripel (1.1) mit $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$ und $\Delta = 0$ hat keinen hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreis.

Beweis: Antithese: $R = R_l$ sei der Radius eines hyperoskulierenden Berührkreises. Wegen $\Delta = 0$ gilt also, wenn wir o.B.d.A. wegen (2.6) $l = k$ annehmen, $\mathbf{d}(P, a) + 2R_k(x_B - x_P)^2 = 0$. Berücksichtigen wir dies in (2.8′) für $l = i, j$, so folgt

$$x_B = a_{ik} \quad \text{oder} \quad x_B^* = a_{ik} \quad \text{und} \quad x_B = a_{jk} \quad \text{oder} \quad x_B^* = a_{jk}.$$

Wegen $I \neq 0$ gilt also o.B.d.A. $x_B = a_{ik}$ und $x_B^* = a_{jk}$. Nach Lemma 2 berührt K_k die Kreise K_i und K_j. Dies steht im Widerspruch zu Satz 2.

■

3. Konstruktionslemmata

Lemma 3. *Besitzt ein Kreistripel (1.1) einen parabolischen Berührkreis K, der zum Tripelkreis K_l inkongruent ist, so sind die Punkte P, P_l und der Berührpunkt B_l von K und K_l kollinear.*

Beweis: Nach Voraussetzung gilt für den Radius R von K: $R(R - R_l) \neq 0$. Mit (1.7′) und (2.1) folgt für $B_l = (a_l, b_l)$

$$a_l - x_l = R\frac{x_l - x_P}{R_l - R}, \quad b_l = R_l a_l^2 + \alpha_l a_l + \beta_l. \tag{3.1}$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

Ist $B_l \| P_l$, so ist B_l mit P_l, P kollinear. Für $B_l \nparallel P_l$ berechnen wir

$$\frac{b_l - y_l}{a_l - x_l} = A + \mathrm{R}_l(a_l - x_l) + \frac{\mathbf{P}(a, K_l)}{4\mathrm{R}_l(a_l - x_l)} \tag{3.2}$$

und

$$\frac{y_P - y_l}{x_P - x_l} = A + \frac{\mathbf{d}(P, a)}{x_P - x_l} + \frac{\mathbf{P}(a, K_l)}{2\mathrm{R}_l(x_P - x_l)}.$$

Also sind P, P_l, B_l genau dann kollinear, wenn die zu (1.16) mit (1.15′) folgende äquivalente Relation

$$(\mathrm{R} - \mathrm{R}_l)[(\mathrm{R} + \mathrm{R}_l)\mathbf{p}(P, K_l) + \mathbf{d}(P, a)] + \mathrm{R}_l^2(x_l - x_P)^2 = 0 \tag{3.3}$$

gilt. ■

Bemerkung 2. Damit sind die Berührpunkte eines Kreistripels (1.1) mit $\mathbf{p}(P, K_l) = 0$, also auch der zugehörige Berührkreis K konstruierbar. Wegen $x_B = x_B^* = x_P$ berührt K die Ähnlichkeitsachse des Kreistripels (s. Abb. 1).

Lemma 4. *Für ein Kreistripel mit (1.1) sei* $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$. *Ist dann der Pol* P_m *der Ähnlichkeitsachse am Tripelkreis* K_m *nicht zum Potenzzentrum* P *parallel, so ist die Gerade* PP_m *genau für* $\Delta = 0$ *Tangente des Kreises* K_m.

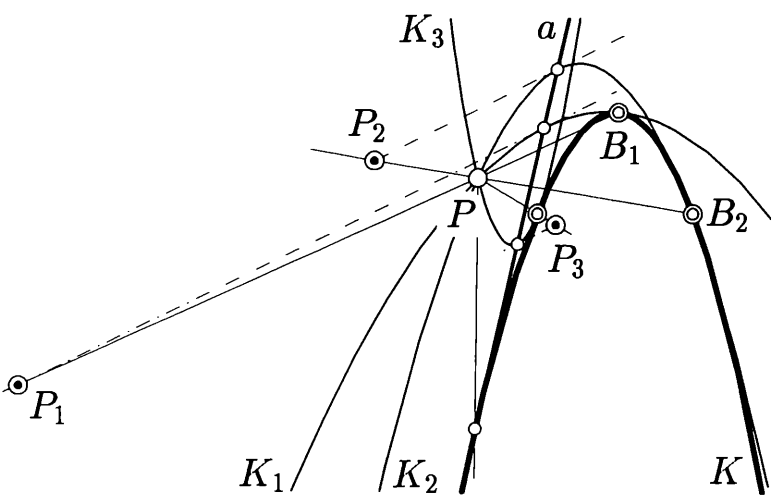

Abb. 4. Beispiel eines Kreistripels mit $\mathbf{p}(P, K_l) = 0$ und einem Apollonischen Berührkreis

Beweis: Nach Voraussetzung existiert die nicht isotrope Gerade PP_m. Aus (1.14′) folgt

$$\frac{y_m - y_P}{x_m - x_P} = 2R_m x_B + \alpha_m + \frac{\mathbf{d}(P,a) - 2R_m(x_B - x_P)(x_m - x_B)}{x_m - x_P}$$

und äquivalent

$$\frac{y_m - y_P}{x_m - x_P} = 2R_m x_B^* + \alpha_m + \frac{\mathbf{d}(P,a) + 2R_m(x_B - x_P)(x_m - x_B^*)}{x_m - x_P}$$

Mit den Berührpunkten $T_m = (x_B, y_m^t)$ bzw. $T_m^* = (x_B^*, y_m^{*t})$ der Tangenten von P an K_m gilt

$$\frac{y_m^t - y_P}{x_B - x_P} = 2R_m x_B + \alpha_m \quad \text{bzw.} \quad \frac{y_m^{*t} - y_P}{x_B - x_P} = 2R_m x_B^* + \alpha_m,$$

sodaß die Behauptung aus (2.8′) folgt.

Satz 6. Für ein Kreistripel mit (1.1) und $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$ berühren sich dann und nur dann genau zwei Tripelkreise, wenn $\Delta = 0$ und für $l = i, j, k$ $P \nparallel P_l$ gilt.

Beweis: (a) Es gelte $\Delta = 0$ und $P \nparallel P_l$. Dann können in (2.8′) für kein l beide Faktoren gleichzeitig verschwinden. Also folgt für *zwei* $l \in \{i, j, k\}$ entweder

$$\begin{aligned} &\mathbf{d}(P,a) - 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B) = 0 \quad \text{oder} \\ &\mathbf{d}(P,a) + 2R_l(x_B - x_P)(x_l - x_B^*) = 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Also folgt für $m, n \in \{i, j, k\}$ entweder

$$\begin{aligned} &\alpha_m - \alpha_n + 2(R_m - R_n)x_B = 0 \quad \text{oder} \\ &\alpha_m - \alpha_n + 2(R_m - R_n)x_B^* = 0. \end{aligned}$$

Wegen $I \neq 0$ gilt dies für genau zwei $m, n \in \{i, j, k\}$, $m \neq n$. Wir haben $x_B = a_{mn}$ oder $x_B^* = a_{mn}$, also nach Lemma 2 $\varphi^2(K_m, K_n) = 0$. Lemma 1 liefert die Behauptung.

(b1) O.B.d.A. gelte $\varphi^2(K_m, K_n) = 0$. Mit den Berührpunkten T_l, T_l^* (s. Lemma 4) gilt wegen $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$ entweder $A_{mn} = T_m = T_n$ oder $A_{mn} = T_m^* = T_n^*$:

$$b_{mn} = Aa_{mn} + B = R_n a_{mn}^2 + \alpha_n a_{mn} + \beta_n.$$

Setzen wir in die Potenzformel $x_B = a_{mn}$ bzw. $x_B^* = a_{mn}$ ein, so folgt

$$R_n(a_{mn}^2 - 2a_{mn}x_P) = -y_P + \alpha_n x_P + \beta_n$$

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

und wir berechnen

$$-\mathbf{d}(P,a) = -y_P + Ax_P + B = [A - \alpha_n - 2R_n a_m](x_P - a_m).$$

Also gilt (3.4), d.h. $\Delta = 0$.

(b2) Da sich genau die Kreise K_m, K_n berühren, gilt wegen $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0$: $P_m \nparallel P \nparallel P_n$. Sei K_l der verbliebene Kreis des Tripels K_l, K_m, K_n. Berücksichtigen wir in

$$4IR_l(x_l - x_P) = \varphi^2(K_l, K_m)(R_l - R_n) - \varphi^2(K_l, K_n)(R_l - R_m),$$

daß $\varphi^2(K_m, K_n) = 0$, so folgt: $2(R_m - R_n)(x_l - x_P) = I$.

■

Bemerkung 3. Damit ist im Falle $\mathbf{p}(P, K_l) \neq 0, \Delta = 0$ der (nach Satz 5) Apollonische Berührkreis K des Tripels (1.1) konstruierbar. Berühren sich K_m, K_n, so berührt die Gerade PP_l den verbliebenen Tripelkreis K_l im Berührpunkt B_l mit K. Nach §**1** liegt B_l auf der Ähnlichkeitsachse (s. Abb. 3).

Lemma 5. *Sei für ein Kreistripel (1.1) K ein parabolischer, zu den Tripelkreisen K_m und K_n inkongruenter Berührkreis. Sind dann seine Berührpunkte B_m, B_n mit K_m, K_n verschieden, so geht die Verbindungsgerade $B_m B_n$ durch das Ähnlichkeitszentrum A_m.*

Denn das Tripel K, K_m, K_n gehört zur Klasse M.

Bemerkung 4. Damit lassen sich die Berührkreise für jene Kreistripel (1.1) mit $\Delta \neq 0$, bei denen für genau ein m: $P \| P_m$ und $P \neq P_m$ gilt, konstruieren. Nach Satz 6 (Beweisteil(b1)) sind die Tripelkreise K_l paarweise nicht berührend und erfüllen nach (2.3) die *Schnittwinkelrelation* (o.B.d.A. sei $m = k$)

$$\varphi^2(K_k, K_j)(R_k - R_i) - \varphi^2(K_k, K_i)(R_k - R_j) = 0. \tag{3.5}$$

Ist $\mathbf{P}(a, K_l) = 0$, so ist die Ähnlichkeitsachse der Apollonische Berührkreis. Der hyperoskulierende Apollonische Berührkreis geht nach (1.15′), (1.16) und (1.7″) durch das Potenzzentrum. Die Konstruktion seiner ihn bestimmenden Berührpunkte erfolgt nach Lemma 3.

Für $\mathbf{P}(a, K_l) \neq 0$ ergeben sich die Berührpunkte B_l von K_l mit dem Apollonischen Berührkreis K für $l = k$ nach Lemma 3 und für $l = i, j$ nach Lemma 3 *und* Lemma 5. Die Berührpunkte $\bar{B}_i, \bar{B}_j$ des hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreises $\bar{K}$ mit K_i, K_j sind jedesmal die "Restschnittpunkte" von PP_i, PP_j mit K_i, K_j (s. Abb. 2).

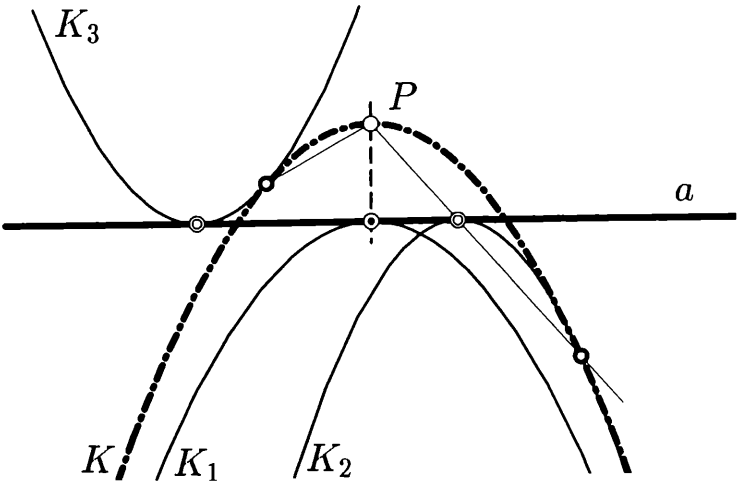

Abb. 5. Beispiel eines Kreistripels mit der Ähnlichkeitsachse als Apollonischem Berührkreis und einem hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreis

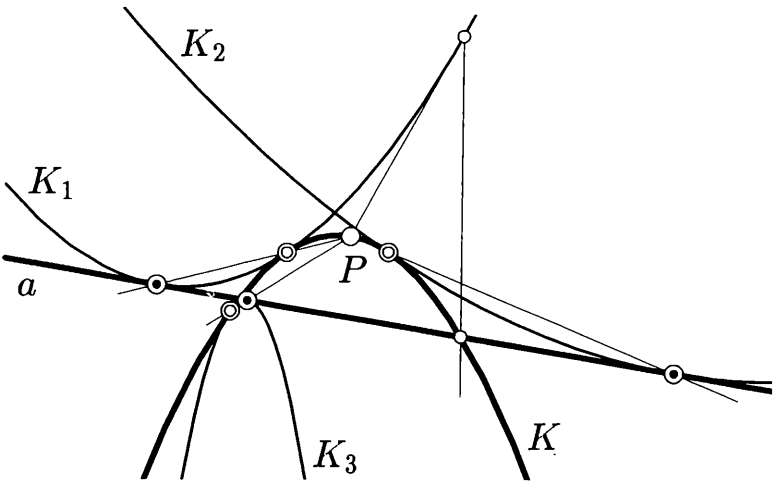

Abb. 6. Beispiel eines Kreistripels mit $\mathbf{P}(a, K_l) = 0$ und einem Apollonischen parabolischen Berührkreise

Bemerkung 5. Gilt $\mathbf{P}(a, K_l) = 0$ und $P \nparallel P_l$ für alle l, so gibt es neben der Ähnlichkeitsachse auch einen parabolischen Berührkreis K. Für seinen Radius R gilt: $\mathbf{p}(P, K_l)\mathrm{R} + \mathbf{d}(P, a) = 0$. Nach (1.7″) *geht K durch das Potenzzentrum P.* Damit sind seine Berührpunkte mit den Tripelkreisen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

nach Lemma 3 konstruierbar. Nach (1.7″) ist die Tangente an K in P parallel zur Ähnlichkeitsachse (s. Abb. 6).

4. Die Konstruktion der Berührkreise im allgemeinen Fall

1. Nach den voranstehenden Bemerkungen verbleiben nur noch Kreistripel (1.1) mit

$$\mathbf{p}(P, K_l)\mathbf{P}(a, K_l)\,\Delta \neq 0. \tag{4.1}$$

Die quadratische R–Gleichung (1.16) hat nach (4.1) stets verschiedene nicht verschwindende Lösungen. Nach Bemerkung 4 sind somit nur noch die Konstruktionen der Berührkreise in den Fällen

(a) $P_m \| P \| P_n$ mit $P_m \neq P \neq P_n$ für genau zwei verschiedene Tripelkreise K_m, K_n,

(b) $P_l \nparallel P$ für alle Tripelkreise K_l

zu behandeln.

Der Fall (a) kann nach (2.6) für die Tripel (1.1) mit $R_i = R_j$ *nicht* eintreten. Für die übrigen Tripel (1.1) bedeutet (a), daß die Kreistripel zwei

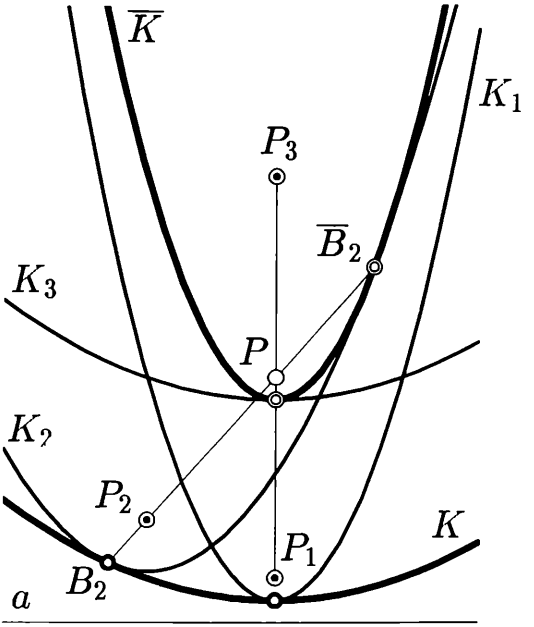

Abb. 7. Beispiel eines Kreistripels mit (4.1) und zwei parabolischen hyperoskulierenden Apollonischen Berührkreisen

Schnittwinkelrelationen analog zu (3.5) erfüllen müssen. Das Kreistripel hat dann zwei parabolische hyperoskulierende Apollonische Berührkreise $K, \bar{K}$. Lemma 3 und Lemma 5 liefern die Konstruktion der Berührpunkte mit K_j, K_k bzw. $K_i, K_k (m = i, n = j)$.

2. Im Falle (4.1) mit (b) berühren sich nach Satz 6 keine zwei Tripelkreise. Nach dem Existenzsatz gibt es zwei parabolische inkongruente Apollonische Berührkreise $K, \bar{K}$, die per definitionem zu allen Tripelkreisen jeweils inkongruent sind.

Zur Durchführung der Konstruktion von $K, \bar{K}$ bemerken wir vorab, daß die mit (1.5) definierte Abbildung

$$x_j = a_{ij} + \frac{R_i}{R_j}(x_i - a_{ij}), \quad y_j = b_{ij} + \frac{R_i}{R_j}(y_i - b_{ij}) \quad \text{für } R_i \neq R_j \tag{4.2}$$

bzw.

$$x_j = x_i + \frac{\alpha_i - \alpha_j}{2R_{ij}}, \quad y_j = y_i + \frac{\alpha_i^2 - \alpha_j^2}{4R_{ij}} - \beta_i + \beta_j, \quad R_{ij} := R_i = R_j \tag{4.3}$$

eine (spezielle) *winkeltreue isotrope Ähnlichkeit* von I_2 ist. Affin gesprochen ist (4.2) eine Homologie und (4.3) eine Elation. Durch (4.4) bzw. (4.3) werden

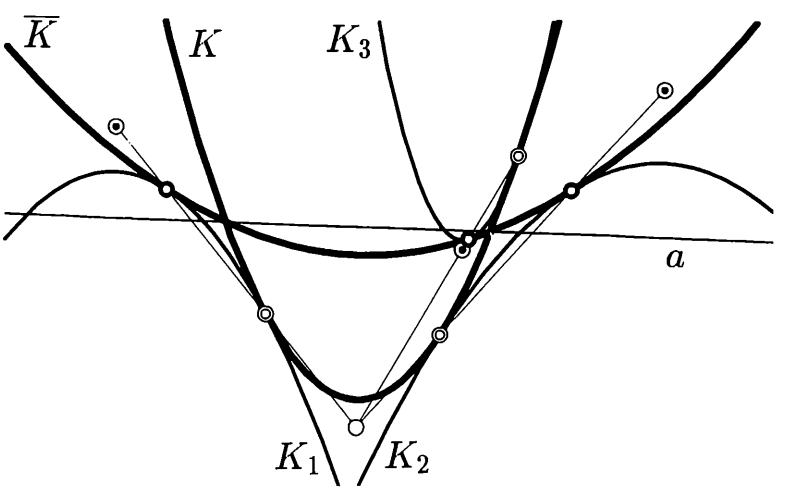

Abb. 8. Beispiel eines Kreistripels mit (4.1) und zwei parabolischen Apollonischen Berührkreisen

©Akademie d. Wissenschaften Wien; download unter www.biologiezentrum.at

die Punkte $P(x_i, y_i)$ des Tripelkreises K_i auf die Punkte $P(x_j, y_j)$ des Tripelkreises K_j von (1.1) abgebildet. Genau in homologen (elativen) Punkten von K_i und K_j sind die entsprechenden Kreistangenten parallel.

Nach Lemma 4 schneidet die Gerade PP_l den Tripelkreis K_l in zwei verschiedenen Punkten $B_l, \bar{B}_l$ von $I_2(\mathbb{C})$. Diese sind nach Lemma 3 die Berührpunkte von $K, \bar{K}$ mit K_l. Nach Satz 3 und Satz 6 (Beweisteil (b1)) sind diese sechs Punkte $B_l, \bar{B}_l (l = i, j, k)$ paarweise verschieden.

Zur Zuordnung zu den Kreisen $K, \bar{K}$ sei $B_i \in K$ und $\bar{B}_i \in \bar{K}$ fixiert. Da sich keine Tripelkreise berühren, ist die Gerade $A_{ij}B_i$ bestimmt. Nach Lemma 5 geht sie durch $B_j \in K, K_j$. Liegt auch $\bar{B}_j$ auf $A_{ij}B_i$, so nach Konstruktion auch $\bar{B}_i$. Dann hat nach obiger Vorbemerkung genau einer der Punkte $B_j, \bar{B}_j$ eine zur Tangente von $B_i \in K_i$ nicht parallele Tangente. Dieser Punkt sei $B_j \in K_j$. Durch Wiederholung der Schritte bestimmen wir $B_k \in K$. Damit sind die Apollonischen Berührkreise über ihre Berührpunkte mit den Tripelkreisen konstruktiv bestimmt.

Danksagung

Besonderer Dank meinem Freund Dr. W. Schürrer für die Anfertigung der Figuren.

Literatur

[1] Lang, J.: Zur isotropen Dreiecksgeometrie und zum Apollonischen Berührproblem in der isotropen Ebene. Ber.d.Math.Stat.Sek., Forschungszentrum Graz, Ber. **241**, 1–11 (1983).

[2] Sachs, H.: Ebene isotrope Geometrie. Braunschweig Wiesbaden: Vieweg-Verlag, 1987.

[3] Salmon, G., Fiedler, W.: Analytische Geometrie der Kegelschnitte I. Leipzig: Teubner-Verlag, 1907.

[4] Strubecker, K.: Zwei Anwendungen der isotropen Dreiecksgeometrie auf ebene Ausgleichsprobleme. Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl.II **192**, 497–559 (1983).

[5] Tölke, J.: Zu den kongruenten Kreisen eines linearen parabolischen Kreissystems der isotropen Ebene, Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl.II **205**, 153–167 (1996).

[6] Tölke, J.: Zu den isotropen Kreistripeln mit kongruenten Apollonischen Berührkreisen. Sb. Österr. Ak. Wiss. Math.-Nat. Kl.II **206**, 267–277 (1997).

Anschrift des Verfassers: Prof. Dr. J. Tölke, Fachbereich 6–Mathematik, Universität Gesamthochschule Siegen, Hölderlinstraße 3, D-57068 Siegen, Deutschland.